

УДК 624.042.7

DOI [10.37153/2618-9283-2021-2-10-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2021-2-10-17)

### **Теоретические и экспериментальные исследования**

#### **Знаки одномодальных усилий реакции в линейно-спектральном методе: сравнение классического и нормативного подходов**

**Тяпин А.Г.**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>АО «Атомэнергопроект». Москва, Российская Федерация

**Аннотация:** В статье сравниваются два варианта линейно-спектрального метода (ЛСМ): «классический», прописанный в ряде зарубежных норм, и «нормативный», прописанный в отечественных гражданских нормах СП 14.13330. «Однокомпонентные одномодальные» реакции, полученные статическим расчетом по ЛСМ, в классическом варианте ЛСМ суммируются дважды: сначала по разным формам, но для каждой компоненты воздействия в отдельности, а потом между разными компонентами воздействия. В нормативном варианте ЛСМ сначала для каждой формы выбирается «опасное направление» однокомпонентного сейсмического воздействия в пространстве, вычисляется «опасная» одномодальная реакция на такое воздействие, а затем проводится суммирование полученных «опасных одномодальных» реакций по разным формам. В обоих случаях суммирование одномодальных реакций проводится по правилу полной квадратичной комбинации (СQC) с учетом корреляции между одномодальными реакциями. Нормативный подход оставляет неопределенность в отношении смены выбранного «опасного направления сейсмического воздействия» на ровно противоположное. От такой смены направления поменяется знак одномодальной реакции. Это не имеет значения при суммировании одномодальных усилий по правилу ККСК в случае некоррелированных реакций, однако для коррелированных реакций, как показано в настоящей статье на простом примере, неопределенность со знаками одномодальных реакций может привести к недостоверным результатам, причем погрешность окажется существенной.

**Ключевые слова:** линейно-спектральный расчет сооружений на сейсмические воздействия, коэффициенты корреляции, одномодальные реакции

**Для цитирования:** Тяпин А.Г. Знаки одномодальных усилий реакции в линейно-спектральном методе: сравнение классического и нормативного подходов // *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2021. № 2. С. 10-17.

DOI: [10.37153/2618-9283-2021-2-10-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2021-2-10-17)

@ Тяпин А.Г., 2021

## Theoretical and experimental studies

### Signs of the "one-mode" response forces in linear spectral method: comparison of conventional and standard approaches

Тяпин А.Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>JSC "Atomenergoproject". Moscow, Russian Federation

**Abstract:** Two variants of linear-spectral method (LSM) are compared in the paper: the conventional one, prescribed in several foreign Standards, and "Standard" one prescribed in the Russian Standard SP 14.13330. "One-component one-mode" responses, obtained by static analysis in the conventional LSM are combined twice: first for different modes but for each single excitation component, then for different excitation components. In the "standard" alternative LSM variant first one chooses the "most dangerous" direction of the one-component excitation for each mode, then one obtains the "one-mode" response for this excitation, and finally these responses are combined. In both cases the combination is performed using the complete quadratic combination (CQC) rule, accounting for the correlation between one-mode responses. "Standard" variant leaves some uncertainty: the "dangerous" direction can be changed for the opposite one. Such a change leads to the sign change in the one-mode response. This is of no importance for the non-correlated responses, which are combined using the SRSS rule. However, for the correlated responses as it is shown in the paper using sample problem the uncertainty in the signs can lead to the incorrect results, and the error can be significant.

**Keywords:** linear-spectral seismic analysis of structures, correlation coefficients, one-mode responses

**For citation:** Тяпин А.Г. Signs of the "one-mode" response forces in linear spectral method: comparison of conventional and standard approaches // *Seismostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii* = *Earthquake engineering. Constructions safety*. 2021, no. 2, pp. 10-17. (In Russian) DOI: [10.37153/2618-9283-2021-2-10-17](https://doi.org/10.37153/2618-9283-2021-2-10-17)

В настоящее время линейно-спектральный метод (ЛСМ) используется для расчета сооружений на сейсмические воздействия как минимум в двух вариантах. Первый вариант (условно назовем его «классическим») прописан в атомных нормах ASCE4-98 [1], а также, к примеру, в нормах Казахстана [2]. Он заключается в том, что сначала рассчитываются т.н. «одномодальные однокомпонентные» спектральные сейсмические нагрузки и соответствующие им «одномодальные однокомпонентные» реакции (внутренние усилия). При этом ускорения воздействия задаются по очереди по каждой из компонент, направленных вдоль осей исходной системы координат (безо всякого выбора опасных или безопасных направлений). Затем полученные реакции специальным образом суммируются дважды. Сначала суммирование проводится по разным формам в рамках фиксированных компонент воздействия - в результате получаются «многомодальные однокомпонентные» реакции. Затем проводится суммирование этих реакций по разным компонентам. Оба суммирования проводятся по правилу полной квадратичной формы (CQC). Сразу приведем формулу суммирования по правилу полной квадратичной формы

$$R = \pm \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N R_j R_k \varepsilon_{jk}} \quad (1)$$

Здесь  $R$  – суммарная реакция, которая берется с таким знаком, чтобы обеспечить наиболее опасный вариант нагружения;  $R_j$  – слагаемые реакции ( $j=1, \dots, N$ );  $\varepsilon_{jk}$  – коэффициент корреляции между слагаемыми, рассчитываемый по неким специальным формулам. Диагональные элементы  $\varepsilon_{jj}$  матрицы коэффициентов корреляции всегда равны единице. Если внедиагональные элементы этой матрицы равны нулю (это означает, что все слагаемые статистически независимы), правило полной квадратичной формы (1) переходит в правило «корня квадратного из суммы квадратов» (ККСК). Для ясности напомним, что термины «коррелированные» и «статистически независимы» относятся к реакциям во времени  $R_j(t)$ ; те реакции  $R_j$ , которые мы видим в формуле (1), являются спектральными реакциями, т.е. максимальными по времени модулями реакций  $R_j(t)$ , взятыми с определенными знаками.

Вернемся к описанию классического метода. В первом суммировании учитывается возможная корреляция между реакциями по разным формам, но на одну и ту же компоненту воздействия (каждую по очереди). Во втором суммировании корреляция не учитывается (считается, что «многомодальные однокомпонентные» реакции статистически независимы, как и сами компоненты ускорений воздействия, поэтому они суммируются по правилу ККСК).

Второй вариант ЛСМ, который будет рассматриваться в этой статье, мы условно назовем «нормативным», поскольку он прописан в российских нормах СП 14.13330 [3]. Этот вариант меняет порядок работы с разными формами и компонентами воздействия по сравнению с классическим вариантом, описанным выше: сначала определенным образом формируются «одномодальные многокомпонентные» реакции по каждой форме, а затем уже эти реакции суммируются по правилу полной квадратичной формы с учетом возможной корреляции между ними. Формирование «одномодальных многокомпонентных» реакций проводится, исходя из концепции «опасного направления сейсмического воздействия»: фактически воздействие принимается однокомпонентным, но направление этой компоненты ускорений в пространстве подбирается из условия максимизации модальной реакции по рассматриваемой форме (это направление и называется «опасным направлением воздействия» для данной формы).

В данной статье автор хотел бы обсудить вопрос о знаках усилий, суммируемых под квадратным корнем в формуле (1). То, что результат суммирования (т.е. суммарные усилия от сеймики) рассматривается в сочетании с усилиями от нагрузок другой природы с обоими своими возможными знаками, вопросов не вызывает. Именно поэтому в формуле (1) перед квадратным корнем стоит знак «плюс-минус»; из двух знаков выбирается опасный с точки зрения сочетания с усилиями от других нагрузок. Физическая основа этой процедуры понятна. Любая исходная компонента сейсмического воздействия, взятая с противоположным знаком, имеет тот же спектр ответа, что и исходная компонента, – поэтому она имеет ровно столько же оснований быть использованной для описания воздействия. Это допущение основано на физических особенностях сейсмического воздействия (действительно, ведь для усилий от веса перебор знаков не применяется).

А теперь давайте рассмотрим, с какими знаками одномодальные усилия входят в суммирование.

Если матрица коэффициентов корреляции диагональная, т.е. суммирование в (1) ведется по правилу ККСК, то знаки слагаемых вообще никакого значения не имеют – все равно слагаемые возводятся в квадрат. А вот ненулевые недиагональные члены матрицы коэффициентов корреляции в (1) умножаются на первые степени одномодальных усилий, и здесь знаки усилий имеют значение для результата. Поэтому данный вопрос важен только для случая коррелированных одномодальных реакций.

Коэффициент корреляции, даваемый как формулой Гупты [1], так и в СП 14.13330 [3], всегда положителен (особенности формул обсуждаются в [4]): оказывается, корреляция между реакциями двух элементарных осцилляторов на одно и то же однокомпонентное воздействие не может быть отрицательной. При совпадении частот и демпфирования у двух рассматриваемых осцилляторов корреляция их реакций будет полной (коэффициент равен единице), при удалении частот друг от друга коэффициент корреляции уменьшается, но все-таки при этом не пересекает нулевую отметку (см. графики в [4]).

Означает ли это положительность произведения двух одномодальных усилий по разным формам? Не обязательно!

Говоря о знаках одномодальных однокомпонентных внутренних усилий  $N_{jk}$  в классическом подходе, мы должны рассмотреть два различных по природе фактора их возможного изменения. Первый фактор – физический, о нем говорилось выше: знак ускорений любой компоненты сейсмического воздействия во времени может быть изменен на противоположный. Каковы будут последствия? Знак абсолютных ускорений  $Z_j(t)$  реакции осциллятора  $j$  во времени тоже изменится на противоположный. Но и знак абсолютных ускорений второго осциллятора  $m$  при этом также изменится на противоположный, т.е. знак произведения  $Z_j Z_m$  останется прежним. В формулах для спектральной одномодальной нагрузки ускорения воздействия представлены своим спектральным значением, которое всегда положительно. Таким образом, физическое изменение знака ускорений сейсмического воздействия на противоположный знак не приведет в классических расчетах ЛСМ к изменению произведений-слагаемых под корнем при вычислении многомодальных спектральных реакций на каждую компоненту в отдельности (хотя и приведет к изменению знаков отдельных сомножителей в произведениях). А в дальнейшем эти многомодальные спектральные реакции на разные компоненты воздействия суммируются в классическом подходе по правилу ККСК, поэтому их знаки (которые мы, кстати, потеряли при извлечении квадратного корня) значения уже не имеют.

Второй из упомянутых факторов возможного изменения знаков одномодальных усилий, в отличие от первого, не является физическим, а имеет сугубо вычислительную природу, т.е. зависит от произвола расчетчика. Как известно, перемещения в любой собственной форме можно умножить на минус единицу, и результат тоже будет собственной формой; при этом нормировка формы по массе останется в силе. Поэтому знак перемещений собственной формы не имеет физической определенности. Как скажется на наших вычислениях смена знака формы  $j$  на противоположный? Коэффициенты участия  $q_{jk}$  формы  $j$  по направлению воздействия  $k$ , получаемые тройным произведением (столбца формы на матрицу масс и на жесткие платформенные перемещения [5]), при смене знака формы сменят знак на противоположный. Но и коэффициент пропорциональности  $p_j$  между рассматриваемым «одномодальным однокомпонентным» усилием реакции  $N_{jk}(t)$  произведением  $q_{jk} Z_{jk}(t)$  тоже сменит знак на противоположный, поэтому одномодальное однокомпонентное внутреннее усилие  $N_{jk}(t)$  знак не поменяет. Действительно, внутреннее усилие  $N_{jk}(t)$  пропорционально одномодальной однокомпонентной спектральной нагрузке, а в выражении для этой нагрузки участвует, кроме коэффициента участия  $q_{jk}$ , еще и сама форма  $\{\varphi_j\}$ . При смене знака формы ее произведение на коэффициент участия знака не изменит. Таким образом, оказывается, что одномодальная однокомпонентная нагрузка во времени, а также соответствующая спектральная нагрузка физичны, т.е. от произвола расчетчика при выборе знака формы они не зависят. А вместе со спектральной нагрузкой физично и внутреннее одномодальное однокомпонентное спектральное усилие  $N_{jk}$ , имеющее свой определенный знак, – не обязательно положительный. Произведение ( $N_{jk} N_{mk}$ )

одномодальных спектральных усилий по формам  $j$  и  $m$  при суммировании реакций на компоненту воздействия  $k$  в классическом подходе вполне может оказаться отрицательным.

Вывод из приведенных рассуждений состоит в том, что в классическом ЛСМ результат устойчив как к физическому изменению знака компоненты воздействия, так и к изменению знака перемещений в собственной форме по произволу расчетчика.

Рассмотрим конкретный пример горизонтальных колебаний двухэтажного сдвигового сооружения с жесткими массивными перекрытиями и невесомыми стенами, показанного на рис.1.

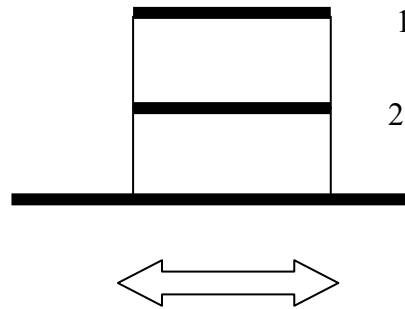


Рисунок 1 – Схема двухэтажного сдвигового сооружения

Figure 1 – Diagram of a two-story shear structure

Пусть массы обоих перекрытий (нумерация сверху вниз, как показано на рис. 1) равны  $m$ , а жесткость на сдвиг обеих этажей равна  $k$ . Матрицы жесткости и масс равны

$$[K] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad [M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Введем безразмерную собственную круговую частоту  $\theta = \omega / (k/m)^{1/2}$ . Тогда уравнение для определения собственных частот имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \theta^2 & -1 \\ -1 & 2 - \theta^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Квадраты безразмерных собственных частот равны

$$\theta_1^2 = 0,3820; \quad \theta_2^2 = 2,6180 \quad (4)$$

Собственные формы до нормировки равны

$$\{\psi_1\} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ 0,618 \end{Bmatrix}; \quad \{\psi_2\} = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ -1,618 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Квадраты нормировочных коэффициентов по массе равны

$$\{\psi_1\}^T [M] \{\psi_1\} = 1,382m; \quad \{\psi_2\}^T [M] \{\psi_2\} = 3,618m \quad (6)$$

После деления ненормированных форм (5) на нормировочные коэффициенты (6) мы получим нормированные по массе собственные формы, которые равны

$$\{\varphi_1\} = \begin{Bmatrix} 0,8507 \\ 0,5257 \end{Bmatrix} m^{-1/2}; \quad \{\varphi_2\} = \begin{Bmatrix} 0,5257 \\ -0,8507 \end{Bmatrix} m^{-1/2} \quad (7)$$

Коэффициенты участия этих форм по единственному направлению воздействия (горизонтальному) равны

$$q_1 = \{\varphi_1\}^T [M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 1,3764 m^{1/2}; \quad q_2 = \{\varphi_2\}^T [M] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0,3250 m^{1/2} \quad (8)$$

Одномодальные спектральные нагрузки равны

$$\{P_1\} = -S_a(T_1) m \{\varphi_1\} q_1 = -S_a(T_1) m \begin{Bmatrix} 1,1709 \\ 0,7236 \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

$$\{P_2\} = -S_a(T_2) m \{\varphi_2\} q_2 = -S_a(T_2) m \begin{Bmatrix} -0,1709 \\ 0,2765 \end{Bmatrix}$$

Здесь  $S_a(T)$  – спектр горизонтальных ускорений воздействия с демпфированием, соответствующим демпфированию в сооружении.

Если в качестве рассматриваемых усилий реакции взять спектральные усилия сдвига в верхнем этаже, то мы (согласно уравнению статического равновесия верхнего перекрытия) увидим их в первых строчках приведенных выше формул (9) для нагрузок. Обратим внимание на то, что они для двух форм имеют разные знаки.

Предположим теперь, что частота ZPA воздействия меньше обеих собственных частот, т.е. что обе формы относятся к жестким высокочастотным в терминологии [4]. Из того, что обе частоты выше частоты ZPA, следует, во-первых, что спектральные ускорения на обеих частотах близки пиковым ускорениям воздействия:  $S_a(T_1) = S_a(T_2) = a$ . Во-вторых, формулы Гупты для реакций по таким формам [4] дают коэффициент корреляции, равный единице. Согласно формуле (1) суммарное сейсмическое сдвиговое усилие  $N$  в верхнем этаже будет равно

$$N = \pm a m \sqrt{(1,1709)^2 + 2(1,1709)(-0,1709) + (-0,1709)^2} = \pm a m \sqrt{(1,1709 - 0,1709)^2} = \pm a m \quad (10)$$

Это вполне понятный и физически объяснимый результат. Действительно, если обе собственные частоты больше частоты ZPA воздействия, то сооружение при таком воздействии будет перемещаться как жесткое тело, без деформаций. Ускорения верхнего перекрытия (впрочем, как и нижнего) будут равны ускорениям воздействия на платформе в любой момент времени. Пиковое значение сдвигающей силы в верхнем этаже будет равно произведению массы верхнего перекрытия на пиковое ускорение, что мы и наблюдаем в формуле (10).

Это было решение задачи с помощью классического подхода. А теперь применим к той же задаче нормативный подход, прописанный в СП 14.13330. Собственные частоты, формы и коэффициенты участия останутся такими же. Но вот мы дошли до момента выбора опасного направления воздействия при вычислении одномодальных спектральных

нагрузок. Напомним, что эти нагрузки в нормативном подходе вычисляются с использованием вектора  $e_j$  направляющих косинусов опасного направления ускорений воздействия для формы  $j$  (этот вектор скалярно умножается на вектор  $q_j$  коэффициентов участия формы  $j$ ):

$$\{P_j\} = -S_a(T_j) m \{\varphi_j\} (\bar{q}_j, \bar{e}_j) \quad (11)$$

В нашем случае ускорения воздействия горизонтальные, и выбор сводится к тому, принимать ли направляющий косинус равным единице или минус единице, причем выбор этот делается отдельно для каждой формы. Выясняется, что понятие «опасности» направления воздействия, провозглашенное в СП 14.13330, позволяет определить направление ускорений воздействия  $e_j$  только с точностью до знака. Ускорения воздействия с обратным знаком (т.е. замена  $e_j$  на  $-e_j$ ) дадут усилия реакции с обратным знаком, но такие же по модулю. Поэтому при задании критерием «опасности» только максимизации модуля спектральной модальной реакции останется неопределенность в выборе направления  $e_j$  – с точностью до изменения выбранного направления на противоположное.

Логично для устранения этой неопределенности со знаками опасного направления зафиксировать совпадение направлений векторов  $q$  и  $e$ . При этом скалярное произведение векторов равно модулю вектора  $q$ , т.е. оно всегда положительно. Однако при таком подходе мы потеряем отмеченную выше для классического подхода физичность одномодальной однокомпонентной спектральной нагрузки: в произведении формы  $\{\varphi_j\}$  на коэффициент участия, приведенный к опасному направлению  $q=(q,e)$ , сама форма может поменять знак по произволу расчетчика, но второй сомножитель  $q$  останется всегда положительным. Таким образом, в нормативном подходе с выбором опасного направления воздействия мы теряем физический контроль над знаком одномодальной спектральной нагрузки и, следовательно, контроль над знаком одномодальной спектральной реакции. Мы знаем только модуль этой реакции, но не ее знак.

В рассмотренном выше примере, если мы с тем же единичным коэффициентом корреляции будем складывать модули одномодальных реакций, то вместо (10) мы получим

$$N = \pm a m \sqrt{(1,1709)^2 + 2(1,1709)(0,1709) + (0,1709)^2} = \pm a m \sqrt{(1,1709 + 0,1709)^2} = \pm a m \times 1,3418 \quad (12)$$

Как видим, разница с физически достоверным результатом (10) составила более 34%. В этом расчете использовался физически обоснованный единичный коэффициент корреляции. Формально СП 14.13330 предписывает использовать другой, физически не всегда обоснованный «белешумный» коэффициент корреляции, не учитывающий частотного состава воздействия [4]. Для разнесенных частот (как в нашем случае) этот коэффициент будет нулевым, и вместо 1,3418 в (10) мы получим 1,1833.

Перейдем к выводам. Выяснилось, что подход с «опасным направлением сейсмического воздействия» для отдельно взятой формы, прописанный в СП 14.13330, оставляет неопределенность в отношении возможной смены такого направления на ровно противоположное. От такой смены модули модальной спектральной реакции не меняются, как и модули одномодальной спектральной нагрузки. Не поменяется и модуль одномодального усилия, но поменяется его знак. Смена знака одномодального усилия не имеет значения при суммировании таких усилий по правилу ККСК, так что выводы [5] об эквивалентности нормативного метода и классического метода в случае некоррелированных реакций остаются в силе. Однако для коррелированных реакций, как

показано в настоящей статье на простом примере, неопределенность со знаками одномодальных реакций может привести к недостоверным результатам, причем погрешность окажется существенной.

### Список литературы

1. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
2. СП РК 2.03-30-2017. Строительство в сейсмических зонах. Комитет по делам строительства, жилищно-коммунального хозяйства и управления земельными ресурсами Министерства национальной экономики Республики Казахстан. Астана. 2017.
3. Свод правил СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах СНиП II-7-81\*. Издание официальное. М.: Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства, 2018. Изменения №1 введены с 01.07.2020.
4. Тяпин А.Г. Суммирование модальных реакций в линейно-спектральном методе: сравнение различных формул для коэффициентов корреляции // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2021. № 1. С. 32-42.
5. Тяпин А.Г. «Опасные направления сейсмического воздействия» в линейно-спектральных расчетах // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2019. № 3. С.22-29.

### References

1. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. ASCE4-98. Reston, Virginia, USA. 1999.
2. SP RK 2.03-30-2017. Stroitel'stvo v seismicheskikh zonakh. Komitet po delam stroitel'stva, zhilishchno-kommunal'nogo khoziaistva i upravleniia zemel'nymi resursami Ministerstva natsional'noi ekonomiki respubliki Kazakhstan. Astana, 2017 [In Russian]
3. Svod pravil SP 14.13330.2018. Stroitel'stvo v seismicheskikh raionakh SNIP II-7-81\*. Izdanie ofitsial'noe. M. Ministerstvo stroitel'stva i zhilishchno-kommunal'nogo khoziaistva, 2018. Izmeneniia № 1 vvedeny s 01.07.2020 [In Russian]
4. Tyapin A.G. Combination of modal responses in linear spectral method: comparison of different formulae for correlation coefficients. *Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii* = Earthquake engineering. Constructions safety. 2021, no. 1, pp. 32-42. [In Russian] DOI: 10.37153/2618-9283-2021-1-32-42
5. Tyapin A.G. "Dangerous Directions of Seismic Excitation" in Linear Spectral Analysis. *Seismostoikoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii* = Earthquake engineering. Constructions safety. 2019, no. 3, pp. 22-29. [In Russian].

### Информация об авторе/Information about author

Тяпин Александр Георгиевич – доктор технических наук, главный специалист БКП-2 АО «Атомэнергопроект». Москва, Российская Федерация

[Tyapin.AG@yandex.ru](mailto:Tyapin.AG@yandex.ru)

Alexander G. Tyapin, Doctor of Technical Science, Senior Specialist BKP-2 JSC "Atomenergoproekt". Moscow, Russian Federation

[Tyapin.AG@yandex.ru](mailto:Tyapin.AG@yandex.ru)

Поступила в редакцию / Received – 24.02.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised – 19.03.2021

Принята к публикации / Accepted – 02.04.2021